MSC 05A18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СВЯЗНЫХ ГРАФОВ НАД КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН

Л.П. Остапенко, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается комбинаторная задача о числе N_n различных связных графов над произвольным конечным множеством из n занумерованных вершин. Предлагается алгоритм вычисления значений функции N_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, алгебра симметричных функций, связный граф.

1. Постановка задачи. Неориентированный конечный *простой* граф (т.е. граф с одним типом вершин и некратных ребер и не имеющий петель) с нумерованными вершинами представляется парой $\langle V, \Sigma \rangle$, в которой V – конечное множество, элементы которого называются *вершинами* и $\Sigma \subset V^{(2)}$, $V^{(2)}$ – множество всех пар элементов из V. Элементы множества Σ называются *ребрами* графа. Такое определение предполагает, в частности, что для любого графа $\langle V, \Sigma \rangle$ любая биекция (отличная от тождественной) множества V на себя, которая индуцирует отображение множества смежности Σ в множество смежности, отличное от Σ, приводит к графу, не совпадающему с $\langle V, \Sigma \rangle$. При этом графы различны, когда они имеют разные матрицы смежности, а не только тогда, когда они топологически различны, то есть их матрицы смежности не могут получены друг из друга одновременной перестановкой строк и столбцов. Изучение такого рода графов оказывается важным при построении разложений специального вида в статистической механике решеточных систем [1].

Множество Σ порождает бинарное отношение *смежности* на V, на основе которого вводится бинарное отношение *связности* на V. А именно, пара $\{x, y\} \subset V$ определяется как связная, если существует последовательность $\langle x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \rangle$ вершин из V такая, что $\{x_j, x_{j+1}\} \in \Sigma$, $j = 0, 1, ..., n-1$, $x_0 = x$, $x_n = y$. Эта последовательность называется *путем* на графе $\langle V, \Sigma \rangle$. Если множество всех возможных путей на этом графе дополнить тривиальными путями $\langle x, x \rangle$, $x \in V$, то таким образом определенное отношение связности становится *рефлексивным*. Тогда, очевидно, что оно является отношением *эквивалентности*. Следовательно, отношение связности, согласно основному свойству отношений эквивалентности, разбивает множество V на непересекающиеся подмножества связных между собой вершин. Каждое такое связное множество V', вместе со всеми ребрами, которые образованы парами $\{x', y'\}$ вершин из V' такими, что $\{x', y'\} \in \Sigma$ составляет отдельный граф. Он называется *связной компонентой* исходного графа. Граф $\langle V, \Sigma \rangle$ называется *связным*, если у него, при указанном разбиении, имеется только одно подмножество эквивалентности, то есть он состоит из одной связной компоненты.

Поставим комбинаторную задачу об определении числа N_n всех возможных различных связных графов, то есть отличающихся множествами смежности, которые можно построить на заданном множестве V, $|V| = n$ вершин. Поясним, что понимается под числом N_n, вычислением его в простейших случаях.

Пример: Определим несколько первых значений числа N_n. Начиная с $n = 4$ перебор всех возможных связных деревьев становится довольно рутинным.

1. При $n = 1$, $V = \{1\}$ имеется только один граф $\langle\{1\}, \varnothing\rangle$, состоящий из единственной вершины 1. Он же, по определению, является связным.

2. При $n = 2$, $V = \{1, 2\}$ имеется два графа и один из них связный $\langle V = \{1, 2\}, \Sigma = \{\{1, 2\}\}\rangle$. Следовательно, $N_2 = 1$.

3. При $n = 3$, $V = \{1, 2, 3\}$ имеется четыре связных графа, соответственно, со следующими множествами смежности: $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$. Все они различны в смысле данного выше определения. Следовательно, $N_3 = 4$.

4. При $n = 4$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Среди связных графов с четырьмя вершинами имеется 16 различных древесных графов (см. [2]) и связные графы содержащие, по крайней мере, один цикл. Последние недревесные графы разобъем на группы согласно различному топологическому типу без учета нумерации вершин. Таких групп четыре. Каждую из них опишем множеством смежности, из которого все остальные множества смежности рассматриваемой группы графов получаются подходящей перестановкой вершин. Для каждой группы укажем число графов, имеющихся в ней, которое легко устанавливается на основе комбинаторных соображений.

Первую группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\{3, 4\}\}$ и в этой группе имеется 12 графов. Вторую группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ и в этой группе имеется 3 графа. Далее, третью группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, в которой имеется 6 графов. Наконец, последняя группа содержит один граф с множеством смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. На основе такого перечисления заключаем, что имеется 22 связных недревесных графа. Следовательно, вместе с древесными графами, получаем, что $N_4 = 38$.

В настоящей работе мы представим алгоритм расчета числа N_n, не использующего прямой перебор всех возможных различных связных графов.

2. Метод производящей функции. Решение задачи основано на вычислении вспомогательной производящей функции

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_n(\varepsilon)\,, \tag{1}$$

где функция $N_n(\varepsilon)$ такова, что $N_n(1) = N_n$ и ряд сходится в некоторой области на комплексной плоскости ε. При этом

$$N_n(\varepsilon) = \left(\frac{d^n}{dz^n} F(z, \varepsilon)\right)_{z=0}. \tag{2}$$

Опишем определение функции $N_n(\varepsilon)$, при котором будет использована техника, разработанная нами в [3]. Равным образом эта техника будет использована при вычислении $F(z,\varepsilon)$.

Пусть $I_n = \{1,2,...,n\}$ – стандартное n-элементное множество. Заметим, прежде всего, что число M_n всех графов (не обязательно связных) над множеством I_n равно $2^{n(n-1)/2}$. Это связано с тем, что в отношении между двумя любыми вершинами с номерами i и j имеется только два возможных состояния: есть соединяющее их ребро, или оно отсутствует. Максимальное же число ребер, которыми можно соединить n вершин, равно $n(n-1)/2$. Если для каждого графа (не обязательно связного) над множеством вершин, отмеченных метками из I_n, ввести переменные σ_{ij}, равные 1, если в этом графе имеется ребро между вершинами с номерами i и j и – 0, в противном случае, то любой граф однозначно описывается функцией σ_{ij}, $i,j = 1 \div n$. Тогда число всех графов совпадает с числом всех указанных функций, которое, как раз, равно указанному выше значению.

Введем последовательность $\langle \varphi(I_n;\varepsilon_{ij}); n \in \mathbb{N} \rangle$ с элементами

$$\varphi(I_n;\varepsilon_{ij}) \equiv \prod_{\{i,j\}} (1+\varepsilon_{ij})\,, \tag{3}$$

где ε_{ij}, $i,j = 1 \div n$ могут принимать любые комплексные значения.

Напомним, что разложением множества I_n называется неупорядоченный набор непустых множеств ω_j, $j = 1 \div s$, которые называются *компонентами* этого разложения и которые составляют дизъюнктивное разложение множества I_n,

$$\bigcup_{l=1}^{s} \omega_l = I_n\,, \quad \omega_j \cap \omega_k \neq \varnothing\,, \quad j \neq k\,, \quad j,k = 1 \div s\,,$$

где s – мощность разложения. Кроме того, обратимся к специальной алгебре, с помощью которой нами были решены [2, 3] комбинаторные задачи, связанные с графами на множеством нумерованных вершин. А именно, последовательность $\Phi = \langle \varphi(I_n;\varepsilon_{ij}); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ с $\varphi(\varnothing) = 0$ можно рассматривать как элемент идеала $\mathbb{A}_0$ коммутативной алгебры $\mathbb{A}$ последовательностей $\langle v_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ симметричных функций v_m, определенных и измеримых на $[0,1]^m$ со значениями в $\mathbb{R}$, $v_m(X_m) \equiv v_m(x_1,x_2,...,x_m)$, $X_m = \langle x_1,x_2,...,x_m \rangle$. При $m=0$ элементы этих последовательностей полагаются константами. Линейные операции в этой алгебре определяются естественным образом как линейные операции с последовательностями. Произведение $*$ в этой алгебре определяется для каждой пары последовательностей $\Upsilon^{(1)} = \langle v_m^{(1)}; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и $\Upsilon^{(2)} = \langle v_m^{(2)}; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ на основе формулы (см. [2])

$$(\Upsilon^{(1)} * \Upsilon^{(2)})_n(X(I_n)) = \sum_{\omega \subset I_n} v_{|\omega|}^{(1)}(X(\omega)) v_{|I_n \setminus \omega|}^{(2)}(X(I_n \setminus \omega))\,,$$

в которой использованы следующие обозначения: $X(\omega) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s} \rangle$ для каждого $\omega = \{i_1,i_2,...,i_s\} \subset I_n$ и $|\omega| = s$ – число элементов в ω.

Единицей алгебры $\mathbb{A}$ является последовательность $\langle 1,0,0,...\rangle$. При этом максимальный идеал $\mathbb{A}_0$ этой алгебры состоит из последовательностей Υ функций с $v_0 = 0$. Для элементов Υ из $\mathbb{A}_0$ имеет место формула (см., например, [1],[3])

$$\Big[\exp_* \Upsilon\Big]_n (X(I_n)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Big[\Upsilon_*^m\Big]_n (X(I_n)) = \sum_{\Omega} \prod_{\omega\in\Omega} v_{|\omega|}(X(\omega))\,, \tag{4}$$

где суммирование в правой части производится по всем разложениям множества I_n.

Производя перемножение всех скобок в определении (3), получим (см. по этому поводу [1]), что

$$\varphi(I_n;\varepsilon_{ij}) = (\exp_* \Psi)(I_n)\,, \tag{5}$$

где $\Psi = \langle \psi(I_n); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ и

$$\psi(I_n;\varphi_{ij}) = \sum_{\Phi_n} \prod_{\{i,j\}\in\Phi_n} \varepsilon_{ij}\,, \tag{6}$$

а суммирование производится по всем связным графам над I_n с отношением связности Φ_n. В частности, если $\varepsilon_{ij} = 1$, то $\psi_n = N_n$.

Положим, теперь, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$ и определим функцию $N_n(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\psi(I_n;\varepsilon) \equiv \sum_{\Phi_n} \varepsilon^{l(\Phi_n)} \equiv N_n(\varepsilon)\,, \quad N_n(1) = N_n\,, \tag{7}$$

где $l(\Phi_n)$ – число ребер в графе $\langle I_n, \Phi_n\rangle$. При этом же условии

$$\varphi(I_n;\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{n(n-1)/2} \equiv M_n(\varepsilon)\,.$$

Заметим, что функции $M_n(\varepsilon)$ и $N_n(\varepsilon)$ являются целыми функциями параметра ε.

Для вычисления производящей функции (1) напомним (см.[3]), что если значение линейной формы $L(z;\cdot)$ на алгебре $\mathbb{A}$, зависящей от параметра $z \in \mathbb{C}$, на каждом элементе $\Upsilon \in \mathbb{A}$ определяется формулой

$$L(z;\Upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} v_n(X_n)dX_n\,, \tag{8}$$

где $dX_n = dx_1 dx_2 ... dx_n$ – мера Лебега на $[0,1]^n$, то эта форма мультипликативна и ее значения заведомо конечны в том случае, когда последовательность функций Υ равномерно ограничена.

Это означает, что для каждой пары элементов $\langle \Upsilon^{(1)}, \Upsilon^{(2)}\rangle$ с равномерно ограниченными элементами имеет место равенство (см., например, [2, 3])

$$L(z;\Upsilon^{(1)} * \Upsilon^{(2)}) = L(z;\Upsilon^{(1)})L(z;\Upsilon^{(2)})\,. \tag{9}$$

Следствием линейности и мультипликативности формы $L(z;\cdot)$ является формула

$$L\big(z;\exp_* \Upsilon\big) = \exp\big(L(z;\Upsilon)\big)\,, \tag{10}$$

имеющая место для любого элемента $\Upsilon \in \mathbb{A}_0$.

Положим теперь, что $\Upsilon = \Psi$. Тогда, согласно (5),

$$L = (z; \Phi) = L\big(z; \exp_* \Psi\big) = \exp\big(L(z;\Upsilon)\big)\,.$$

Это приводит к следующей формуле:

$$\big[L(z;\Phi)\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} M_n(\varepsilon) = \exp\big[L(z;\Psi)\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} =$$

$$= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_n(\varepsilon) = \exp F(z,\varepsilon)\,, \qquad (11)$$

которая связывает производящие функции последовательностей $\langle M_n(\varepsilon); n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle N_n(\varepsilon); n \in \mathbb{N}\rangle$.

Заметим, что ряд в левой части (11), имеющий явный вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (1+\varepsilon)^{n(n-1)/2}\,,$$

сходится при $|1+\varepsilon| < 1$. Следовательно, при этих же условиях сходится ряд для производящей функции $F(z;\varepsilon)$. Тогда при указанном ограничении на ε, согласно (2) и (11), справедлива формула

$$N_n(\varepsilon) = \left(\frac{d^n}{dz^n} \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} M_m(\varepsilon)\right)_{z=0}. \qquad (12)$$

Так как $N_n(\varepsilon)$ – целая функция от ε, то полученное в результате вычислений согласно этой формулы выражение можно аналитически продолжить для любых значений $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, в частности, и на значение $\varepsilon = 1$. В результате, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Число всех связанных графов над множеством вершин I_n определяется формулой*

$$N_n = \left(\frac{d^n}{dz^n} \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} M_m(\varepsilon)\right)_{z=0,\varepsilon=1}. \qquad (13)$$

3. Алгоритм вычисления N_n**.** Несмотря на то, что формула (11) не позволяет представить производящую функцию $F(z;\varepsilon)$ явной аналитической формулой, на основе (13) легко строится алгоритм вычисления чисел N_n для любого $n \in \mathbb{N}$, применение которого при этом позволяет избежать рутинного перебора всех возможных связных графов с фиксированным числом вершин. Этот алгоритм строится следующим образом.

Положим

$$N_n = \left(\frac{d^n}{dz^n} \ln(1 + G(z;\varepsilon)\right)_{z=0,\varepsilon=1}, \qquad (14)$$

где

$$G(z;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \varepsilon^{n(n-1)/2}\,.$$

Подставляя в (14) разложение

$$\ln(1 + G(z;\varepsilon)) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l!} G^l(z;\varepsilon)$$

и дифференцируя его n раз почленно, используя правило

$$\frac{d^n}{dz^n} H_1(z)...H_l(z) = \sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle, s_j\in\mathbb{N}_+ :\\ s_1+...s_l=n}} \frac{n!}{s_1!...s_l!} H_1^{(s_1)}(z)...H_l^{(s_l)}(z)\,,$$

получим при $H_1(z) = ... = H_l(z) = G(z;\varepsilon)$, что

$$\left(\frac{d^s}{dz^s} G(z;\varepsilon)\right)_{z=0} = M_s(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$N_n(\varepsilon) = n!\left(\frac{d^n}{dz^n} \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} M_m(\varepsilon)\right)_{z=0} = n! \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1}}{l!} \sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle, s_j\in\mathbb{N}_+ :\\ s_1+...s_l=n}} \prod_{j=1}^{l} \frac{M_{s_j}(\varepsilon)}{s_j!}\,,$$

где мы использовали, что разложение $G(z;\varepsilon)$ начинается с первой степени z и, следовательно, ряд по m в правой части обрывается при $m = n$. Полагая $\varepsilon = 1$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для чисел N_n справедлива формула*

$$N_n = n! \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1}}{l!} \sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle, s_j\in\mathbb{N}_+ :\\ s_1+...s_l=n}} \prod_{j=1}^{l} \frac{2^{j(j-1)/2}}{s_j!}\,. \tag{15}$$

Правильность построенного алгоритма легко подтверждается вычислением значений N_n при $n = 1, 2, 3, 4$, и сравнением их с теми, которые были получены в п. **1** перебором графов.

Литература

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971. – 368 с.

2. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – №11(208); 39 – С.37-43.

3. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа разложений конечного множества // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – №5(202); 38 – С.84-88.

EVALUATION OF CONNECTED GRAPHS NUMBER WITH FINITE VERTEX SET

L.P. Ostapenko, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Combinatorial problem about the number N_n of different connected graphs with arbitrary finite set of n numbered vertexes is studied. It is proposed the algorithm of values N_n calculation for each $n \in \mathbb{N}$.

Key words: partition of finite set, generation function, algebra of symmetric functions, connected graph.